TUTORIAL : studio di funzione

Sequenza dei passi minimi utili allo studio di una funzione reale y = f(x)	In pratica
Stabilire se la funzione presenta delle simmetrie e/o è periodica.	■ Se $y = f(x)$ è simmetrica rispetto all'asse y, deve verificarsi: $f(-x) = f(x)$ (funzione pari) ■ Se $y = f(x)$ è simmetrica rispetto all'origine degli assi, deve verificarsi: $f(-x) = -f(x)$ (funzione dispari) ■ Nel caso in cui la funzione sia simmetrica, si può restringere lo studio della funzione ai soli valori positivi e dunque costruire il grafico nel solo semipiano $x \geq 0$; per ottenere il grafico completo basterà simmetrizzare la curva ottenuta rispetto all'asse *y* o all'origine ■ Se $y = f(x)$ è periodica, si può limitare lo studio all'ampiezza del periodo.
Determinare il Campo di Esistenza, o Dominio, della funzione. (Si tratta di individuare gli intervalli in cui la funzione assume valori reali; ovvero determinare l'insieme dei punti x_i in cui la funzione non è definita ed escluderli).	Classifica il tipo di funzione: ■ se è una funzione razionale intera il suo dominio è costituito da tutto l'asse reale ■ se la funzione è una razionale fratta, imponi che il denominatore sia diverso da zero. I punti che annullano il denominatore della funzione non appartengono al suo CDE, per tali punti x_i la funzione non esiste; le rette verticali passanti per quei punti sono asintoti verticali per la curva; ■ se la funzione è irrazionale, guarda l'indice del radicale: ▸ se è pari dovrai imporre che il radicando non sia negativo poiché la funzione è a valori reali, ▸ se è dispari, non ci sono imposizioni. ■ Se la funzione è logaritmica ricordati di imporre che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo. ■ Se la funzione è esponenziale non ci sono imposizioni. ■ Se la funzione è trigonometrica bisognerà imporre che gli argomenti della funzione tangente siano diversi da multipli dispari di angoli retti $\neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \; k \in \mathbb{Z}$ ■ Quando la funzione è composta da funzioni di tipo diverso tutte le imposizioni dovranno essere verificate contemporaneamente, ovvero le condizioni dovranno essere legate e condotte algebricamente come un sistema di equazioni. Scrivi il dominio come UNIONE dei diversi intervalli in cui la funzione assume valori reali. Segna graficamente gli intervalli o i punti in cui la funzione non esiste.

Studiare con i limiti il comportamento della funzione agli estremi del CDE.	Calcola i limiti, sinistro e destro, della funzione nell'intorno dei punti x_i $\lim_{x\to x_i} f(x)=\dots$ e all'infinito $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\dots$ Riporta con un segno grafico il comportamento della curva nell'intorno di tali punti.
Ricerca degli eventuali asintoti verticali e orizzontali	Se $\lim_{x\to x_i} f(x)=\pm\infty$ $x = x_i$ è un asintoto verticale. Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=l$ $y = l$ è un asintoto orizzontale.
Ricerca degli eventuali asintoti obliqui	Se $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, allora si calcolano i due limiti : $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ che fornisce il coefficiente angolare m della retta, e $q=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$ che fornisce il valore del termine noto q della retta. Se questi due limiti esistono e sono finiti, allora la retta $y=mx+q$ è un asintoto della curva.
Ricercare l'eventuale intersezione della funzione con l'asse *x*	Poni a sistema l'equazione della curva con l'equazione dell'asse delle ascisse: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases}$ ovvero risolvi l'equazione *f(x)* = 0
Ricercare l'eventuale intersezione della funzione con l'asse *y*	Poni a sistema l'equazione della curva con l'equazione dell'asse delle ordinate: $\begin{cases} y=f(x) \\ x=0 \end{cases}$ ovvero calcola *y* = *f(0)*
Studiare il segno della funzione	Studia la disequazione *f(x)* > 0. Negli intervalli in cui la funzione risulta positiva, la curva sarà situata sopra l'asse delle ascisse. Riporta i risultati sul grafico, escludendo le zone che la curva non attraversa.
Calcolo delle derivate prima e seconda. Il calcolo della derivata prima serve per determinare gli intervalli in cui la funzione cresce o decresce, e per individuare i probabili punti di massimo e minimo relativi. Il calcolo della derivata seconda serve per determinare gli intervalli in cui la curva è concava o convessa, e per individuare i probabili punti di flesso.	$y'=f'(x)=\dots$ $y''=f''(x)=\dots$

Ricerca degli eventuali punti di massimo e di minimo relativo.	Condizione necessaria affinché un punto sia di massimo o di minimo relativo è che $f'(x)=0$. Dunque si tratta di risolvere tale equazione. I valori x_i che la soddisfano sono solo probabili punti di massimo o minimo relativi, in quanto potrebbero anche essere punti di flesso. I punti in cui si annulla la derivata prima si dicono punti stazionari o punti critici.
Studio della monotonia della funzione	Per sapere se questi sono punti di massimo o di minimo per la curva si può procedere in due modi. **1° metodo**: si studia il segno della derivata prima, ovvero si impone che $f'(x)>0$. Lo studio degli intervalli di monotonia, cioè dove la curva è crescente o decrescente, ci fa comprendere se i punti trovati sono di massimo o di minimo. Se la derivata nell'intorno di tali punti non cambia di segno, questi non sono né di massimo né di minimo. **2° metodo**: si sostituiscono le ascisse dei punti x_i nella derivata seconda e si guarda il segno che questa assume. $f''(x_i)>0$: se è positiva la concavità sarà rivolta verso l'alto perciò il punto è di minimo $f''(x_i)<0$: se è negativa la concavità sarà rivolta verso il basso per cui il punto è un massimo $f''(x_i)=0$: se è nulla il punto è molto probabilmente di flesso.
Calcolo delle ordinate degli eventuali punti di massimo e di minimo relativo	Sostituisci una alla volta le ascisse dei punti di massimo o di minimo nell'equazione della curva e ricava l'ordinata. Riporta con un segno i risultati sul grafico
Studio dei punti di non derivabilità	Determina il Campo di Esistenza della derivata prima $y'=f'(x)$. Se x_0 è un punto appartenente al CDE della funzione, ma è un punto di *non derivabilità*: ■ se $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=m$ e $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$ con m ≠ l, allora x_0 è un *punto angoloso*; ■ se $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$ e $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\mp\infty$ allora x_0 è una *cuspide* ■ se $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$, allora x_0 è un *flesso a tangente verticale*.
Ricerca degli eventuali punti di flesso a tangente orizzontale	Imponi $f''(x)=0$ e risolvi. I valori che soddisfano l'equazione sono molto probabilmente le ascisse dei punti di flesso

Studio della concavità e della convessità della funzione	Studia il segno della derivata seconda: $f''(x)>0$. Negli intervalli in cui risulta positiva ($f''(x)>0$), la curva rivolge la concavità verso l'alto (convessa), in caso contrario ($f''(x)<0$) volge la concavità verso il basso (concava). Le soluzioni di $f''(x)=0$ sono le ascisse dei punti in cui la curva cambia la sua concavità, i punti di flesso, e la tangente si dispone orizzontalmente.
Calcolo delle ordinate degli eventuali punti di flesso	Sostituisci una alla volta le ascisse dei punti di flesso nell'equazione della curva e ricava l'ordinata corrispondente. Riporta con un segno i risultati sul grafico

A questo punto dovresti avere sufficienti elementi per comporre qualitativamente l'andamento della curva.