

I quesiti dal 2008 al 2012

Geometria del piano e dello spazio, trigonometria

[2008, ORD] Si consideri la seguente proposizione: “ Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area”. Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

[2008, PNI] Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido.

[2008, PNI] I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9 e 12 cm. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice.

[2008, ORD e PNI] Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $\operatorname{sen} \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

[2008, PNI] Perché è geometria “non” euclidea? Che cosa e come viene negato della geometria euclidea? Si illustri la questione con gli esempi che si ritengono più adeguati.

[2008, ORD] Secondo il codice della strada il segnale di “salita ripida” (fig. a lato) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo.

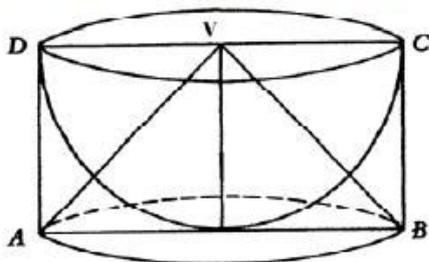
La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%. Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale?



[2009, ORD e PNI] ‘Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni’. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

[2009, ORD e PNI]

Nei “Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze”, Galileo Galilei descrive la

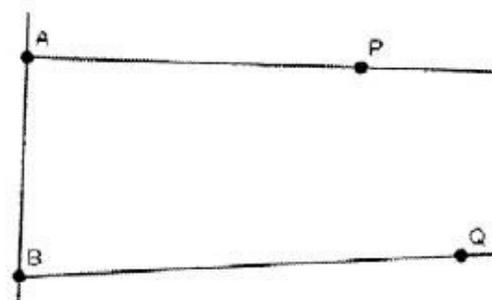


costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro.

Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.

[2009, PNI]

“Se due punti P e Q del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta AB e gli angoli $\hat{P}AB$ e $\hat{Q}BA$ hanno somma minore di 180° , allora le semirette AP e BQ , prolungate adeguatamente al di là dei punti P e Q , si devono intersecare”. Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.



[2010, ORD e PNI] Siano ABC un triangolo rettangolo in A , r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B . Si dimostri che i tre triangoli PAB , PBC , PCA sono triangoli rettangoli.

[2010, ORD e PNI] Si provi che non esiste un triangolo ABC con $AB = 3$, $AC = 2$ e $\hat{A}BC = 45^\circ$.
Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $\hat{A}BC = 30^\circ$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

[2011, ORD e PNI] In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perché è così spesso citato?

[2011, ORD e PNI] Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

[2011, PNI] Silvia, che ha frequentato un indirizzo sperimentale di liceo scientifico, sta dicendo ad una sua amica che la *geometria euclidea* non è più vera perché per descrivere la realtà del mondo che ci circonda occorrono modelli di *geometria non euclidea*. Silvia ha ragione? Si motivi la risposta.

[2012, ORD e PNI] E' dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h . Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h .

Trasformazioni geometriche

[2008, PNI] Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di $y = e^{-2x}$? Quale quella della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

[2010, PNI] Sia G il grafico di una funzione $x \rightarrow f(x)$ con $x \in R$. Si illustri in che modo è possibile stabilire se G è simmetrico rispetto alla retta $x = k$.

Funzioni ed equazioni

[2008, ORD] Si determini, al variare di k , il numero delle soluzioni reali dell'equazione $x^3 - 3x + k = 0$.

[2008, PNI] Nel piano riferito a coordinate cartesiane (x, y) si dica qual è l'insieme dei punti per i quali risulta: $y^2 - x^3 > 0$

[2009, ORD] Si provi che l'equazione:

$$x^{2009} + 2009x + 1 = 0$$

ha una sola radice compresa fra -1 e 0 .

[2009, ORD] Si determini il periodo della funzione $f(x) = \cos 5x$.

[2010, ORD] Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos x}$,

[2010, PNI] Si trovi l'equazione cartesiana del luogo geometrico descritto dal punto P di coordinate $(3\cos t, 2\sin t)$ al variare di t , $0 \leq t \leq 2\pi$.

[2010, ORD] Si provi che l'equazione: $x^{2011} + 2011x + 12 = 0$ ha una sola radice compresa fra -1 e 0 .

[2012, ORD] Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni x reale? Si giustifichi la risposta.

A) $\cos(\sin(x^2 + 1))$ B) $\sin(\cos(x^2 + 1))$ C) $\sin(\ln(x^2 + 1))$ D) $\cos(\ln(x^2 + 1))$

Analisi

[2008, ORD e PNI] Si esponga la regola del marchese de L'Hôpital (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che è:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2008}}{2^x}$$

[2008, ORD] Si determini un polinomio $P(x)$ di terzo grado tale che:

$$P(0) - P'(0) = 0, \quad P(1) = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 P(x) dx = \frac{1}{12}$$

[2008, ORD e PNI] Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

[2008, ORD] Sia $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$; esiste $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.

[2009, ORD] Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è $\sin x$ e il cui grafico passa per il punto $(0; 2)$.

[2009, ORD] Per quale o quali valori di k la curva d'equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?

[2009, ORD e PNI] Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}; \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{1}{0}; \quad 0^0$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

[2009, PNI] Siano: $0 < a < b$ e $x \in [-b, b]$. Si provi che $\int_{-b}^b |x - a| dx = a^2 + b^2$

[2009, ORD] Si calcoli: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

[2010, ORD e PNI] Sia $p(x)$ un polinomio di grado n . Si dimostri che la sua derivata n -ma è $p^{(n)}(x) = n! a_n$, dove a_n è il coefficiente di x^n .

[2010, ORD] Sia γ il grafico di $f(x) = e^{3x} + 1$. Per quale valore di x la retta tangente a γ in $(x, f(x))$ ha pendenza uguale a 2?

[2010, ORD] Si calcoli: $\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \sin \frac{1}{x}$

[2010, ORD] Per quale o quali valori di k è continua in $x = 4$ la funzione $h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4, & x \leq 4 \\ kx^2 - 2x - 1, & x > 4 \end{cases}$

[2010, ORD] Si consideri la regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$ e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse y .

[2010, PNI] Sia r la retta d'equazione $y = ax$ tangente al grafico di $y = e^x$. Quale è la misura in gradi e primi sessagesimali dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?

[2010, PNI] Si consideri la regione R delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$.

L'integrale $\int_0^4 2\pi x(\sqrt{x}) dx$ fornisce il volume del solido:

- a) generato da R nella rotazione intorno all'asse x ;
- b) generato da R nella rotazione intorno all'asse y ;
- c) di base R le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi di raggio \sqrt{x} ;
- d) nessuno di questi.

Si motivi esaurientemente la risposta.

[2011, ORD] Sia R la regione delimitata dalla curva $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 2$ e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y . Si calcoli il volume di W .

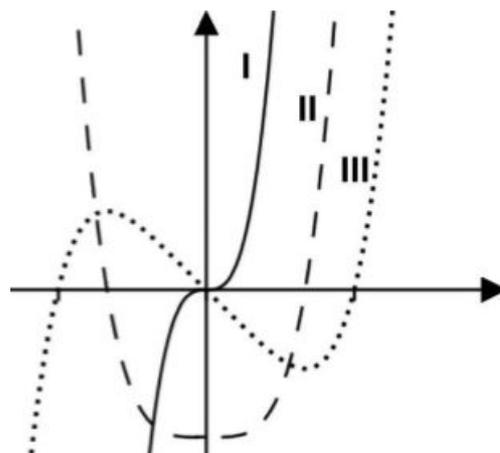
[2011, ORD] Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse x da $x = 1$ a $x = 2$ radianti.

[2011, PNI] Sia R la regione delimitata, per $x \in [0, \pi]$, dalla curva $y = \sin x$ e dall'asse x e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y . Si calcoli il volume di W .

[2011, ORD] Si calcoli $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tga}}{x - a}$

[2011, ORD e PNI] Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f , un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f'' .

Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici? Si motivi la risposta.



	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

[2012, ORD] Cosa rappresenta il limite seguente e qual è il suo valore?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5\left(\frac{1}{2} + h\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}$$

[2012, ORD] Si illustri il significato di *asintoto* e si fornisca un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

[2012, ORD] La posizione di una particella è data da $s(t) = 20\left(2e^{-\frac{t}{2}} + t - 2\right)$. Qual è la sua accelerazione al tempo $t = 4$?

[2012, ORD] Sia $f(x) = 5 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{5}{2} \sin 2x - \cos 2x - 17$; si calcoli $f'(x)$.

[2012, ORD] Qual è il valor medio di $f(x) = \frac{1}{x}$ da $x = 1$ a $x = e$?

[2012, PNI] Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x^2}$$

[2012, PNI] Sia $f(x) = 3^x$. Per quale valore di x , approssimato a meno di 10^{-3} , la pendenza della retta tangente alla curva nel punto $(x, f(x))$ è uguale a 1?

[2012, PNI] Si dimostri che la curva di equazione $y = x^3 + ax + b$ ha uno ed un solo punto di flesso rispetto a cui è simmetrica.

Problemi di ottimizzazione

[2008, ORD] Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?

[2010, ORD] Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

[2011, ORD] Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

[2011, ORD e PNI] Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4; 0)$

[2011 PNI] Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?

[2012, ORD] Quale è la capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro?

[2012, ORD e PNI] Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B , situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r , nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r . Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

[2012, PNI] Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r , quello di minima area laterale ha il vertice che dista $r\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.

Insiemi numerici e combinatoria

[2008, ORD] Se $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ con $n > 3$ sono in progressione geometrica, qual è il valore di n ?

[2009, ORD e PNI] Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di A in B ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?

[2009, ORD e PNI] Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.

[2010, ORD e PNI] Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n ?

[2011, ORD e PNI] Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n .

[2011 PNI] In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme N dei numeri naturali ("i numeri tutti"). Dice Salviati: «...se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni?

[2012, ORD e PNI] Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?

[2012 PNI] L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti? Si giustifichi la risposta.

Probabilità e statistica

[2008, PNI] Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.

[2008, PNI] In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?

[2009, PNI] Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati).

[2009, PNI] Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?

[2010, PNI] Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenta la risposta.

[2011, PNI] Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?

[2012, PNI] Una moneta da 1 euro (il suo diametro è 23,25 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle esagonali (regolari) di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella (cioè non tagli i lati degli esagoni)?

[2012, PNI] Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti (A, B e C). Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento A?

Metodi numerici

[2009, PNI] Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $\sin x = 0$, con punto iniziale $x_0 = 3$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?

[2010, PNI] Si calcoli con la precisione di due cifre decimali lo zero della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$. Come si può essere certi che esiste un unico zero?